

7. CIĄGI

7.1. Ciąg i jego własności

a) Definicja ciągu

Ciągiem nazywamy funkcję $f : N_+ \rightarrow A$.

$f(1) = a_1$ - pierwszy wyraz ciągu, $f(2) = a_2$ - drugi wyraz ciągu, $f(3) = a_3$ - trzeci wyraz ciągu.....

$f(n) = a_n$ - n -ty wyraz ciągu

b) Monotoniczność ciągu

Ciąg (a_n) jest rosnący \Leftrightarrow dla każdego $n \in N_+$ zachodzi $a_{n+1} > a_n$

Ciąg (a_n) jest malejący \Leftrightarrow dla każdego $n \in N_+$ zachodzi $a_{n+1} < a_n$

Ciąg (a_n) jest stały \Leftrightarrow dla każdego $n \in N_+$ zachodzi $a_{n+1} = a_n$

Ciąg (a_n) jest nierosnący \Leftrightarrow dla każdego $n \in N_+$ zachodzi $a_{n+1} \leq a_n$

Ciąg (a_n) jest niemalejący \Leftrightarrow dla każdego $n \in N_+$ zachodzi $a_{n+1} \geq a_n$

Każdy z ciągów: rosnący, malejący, stały, nierosnący, niemalejący jest ciągami monotonicznymi.

Aby zbadać monotoniczność ciągu należy zbadać znak różnicy $a_{n+1} - a_n$

$a_{n+1} - a_n > 0$ - ciąg rosnący

$a_{n+1} - a_n < 0$ - ciąg malejący

$a_{n+1} - a_n = 0$ - ciąg stały

$a_{n+1} - a_n \leq 0$ - ciąg nierosnący

$a_{n+1} - a_n \geq 0$ - ciąg niemalejący

c) Suma częściowa ciągu (a_n)

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

7.2. Ciąg arytmetyczny

a) Definicja ciągu arytmetycznego

Ciąg (a_n) jest ciągami arytmetycznym \Leftrightarrow dla każdego $n \in N_+$ zachodzi $a_{n+1} = a_n + r$,
gdzie $r \in R$ r – stała różnica ciągu arytmetycznego

b) Wzór ogólny ciągu arytmetycznego $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

c) Monotoniczność ciągu arytmetycznego

Monotoniczność ciągu arytmetycznego	Znak r
d) rosnący	$r > 0$
malejący	$r < 0$
stały	$r = 0$

d) Zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego

Jeżeli a , b , c są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, to zachodzi $2b = a + c$

e) Suma częściowa ciągu arytmetycznego

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n$$

7.3. Ciąg geometryczny

a) **Definicja ciągu geometrycznego**

Ciąg (a_n) jest ciągami geometrycznym \Leftrightarrow dla każdego $n \in N_+$ zachodzi $a_{n+1} = a_n \cdot q$,
gdzie $q \in R$ q – stały iloraz ciągu geometrycznego

b) **Wzór ogólny ciągu geometrycznego** $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

c) **Monotoniczność ciągu geometrycznego**

	$a_1 < 0$	$a_1 > 0$	$a_1 = 0$
$q < 0$	nie jest monotoniczny	nie jest monotoniczny	stały
$q = 0$	niemalejący	nierosnący	stały
$0 < q < 1$	rosnący	malejący	stały
$q = 1$	stały	stały	stały
$q > 1$	malejący	rosnący	stały

d) **Zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego**

Jeżeli a, b, c są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to zachodzi $b^2 = a \cdot c$

e) **Suma częściowa ciągu geometrycznego**

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{dla } q \neq 1$$
$$S_n = a_1 \cdot n \quad \text{dla } q = 1$$

7.4. Procent składany

Procent składany, to sposób oprocentowania kapitału K polegający na tym, że dochód w postaci odsetek jest doliczany do kapitału i procentuje wraz z nim w następnym okresie kapitalizacji

Po n okresach kapitalizacji kapitał początkowy K_0 wzrośnie do kwoty $K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$,

gdzie p – stopa procentowa w okresie kapitalizacji.